Orgel und Mathematik

Ideenbericht: Sichtbare Integrale an der Orgel –

Sekundarstufe 2

Kontext – S. 1

Einleitung – S. 1

Themenfindung 3 – S. 2

Die Orgel unter einer Kurve– S. 3

Verschiedene Integrale berechnen– S. 6

Ausblick– S. 7

Ergänzendes Material zu:

B. Lutz-Westphal, D. Klimke, F. Theuner, S. Barbey, H.K. Aebli, Th. d'Hénin:

Orgel und Mathematik –
forschendes Lernen für alle Klassenstufen

https://www.landesmusikrat-berlin.de/fileadmin/projekte/Instrument_des_Jahres/Orgel_2021/Orgel_und_Mathematik_Unterrichtsmaterial_klasse_1_bis_13.pdf

Erstellt von:

Felix Theuner, Damian Klimke
(Freie Universität Berlin)

Instrument
des Jahres 2021
Orgel

Unterrichtsideen
Orgel und Mathematik

–weitere Materialien–

Klassenstufen: 10 bis 12 (13)

Fach: Mathematik

Themen und Inhalte:

Forschendes Lernen –

Sichtbare Integrale bei der Orgel

26.02.2021

LANDESMUSIKRAT BERLIN
musik für alle

Bayerischer Musikrat

Landesmusikrat BADEN-WÜRTTEMBERG e.V.

Kontext

Unsere Idee entstand, als wir beide über die Orgel als vielfältiges Instrument gesprochen haben und uns auffiel, dass die Orgel nicht nur musikalisch, sondern auch mathematisch viel mehr bietet, als es anfänglich den Anschein macht. Als wir uns das Bild der Orgel in Zug ansahen, fiel uns direkt die schöne Front der Orgel auf und die dort verbauten Prospektpfeifen. Die Symmetrie dieser Pfeifenanordnung brachte uns zum Nachdenken.

Abbildung 1: Die Orgel in Zug, Schweiz, der Kirche St. Oswald. Foto: Damian Klimke

Einleitung

Die Orgel ist ein faszinierendes und äußerst komplexes Instrument. Mit der Mathematik der Sekundarstufe II lässt sich das Erscheinungsbild von Orgeln untersuchen und beschreiben. Hier wollen wir exemplarisch zeigen, auf welche Weise das geschehen kann. Auch wenn es dabei keine direkte Verbindung zum Klangerlebnis gibt, so eröffnet der mathematische Blick auf die Formen der Orgel doch eine vertiefte Begegnung mit dem Instrument. Spätestens bei dem Besuch einer Orgel kann dann die Verbindung zwischen der Mathematik und dem beeindruckenden visuellen und akustischen Erlebnis geschaffen werden. Unsere Unterrichtsideen sind für die Sekundarstufe II gedacht. Der Einsatz ist zu unterschiedlichen Zeitpunkten möglich: Zu Beginn der Arbeit mit **Integralen in der Analysis**, oder zur **Festigung, sowie zur Wiederholung in den anschließenden Semestern**. Es ist aber auch gut möglich die Ideen für die Nutzung in der **Analytischen Geometrie** zu entwickeln und Verknüpfungen zu Elementargeometrie herzustellen.

1. Themenfindung

Als wir uns zum ersten Mal mit dem Zusammenhang zwischen Orgel und Mathematik befasst haben, haben wir viele verschiedene Abbildungen von Orgeln angeschaut und überlegt, wie sich diese mit mathematischen Inhalten der Sekundarstufe verbinden lassen. Erfahrungsgemäß ist die Zeit für zusätzliche Themen im Mathematikunterricht besonders in der Sekundarstufe II mit Blick auf das anstehende Abitur sehr beschränkt. Aus diesem Grund haben wir versucht die Inhalte des Rahmenlehrplans bei unseren Ideen zu integrieren, aber gleichzeitig einen Mehrwert aus der Beschäftigung mit dem Instrument zu ziehen.

Ein erster Zugang im Unterricht lässt sich dabei immer sehr gut durch auditive oder visuelle Reize schaffen. Den Schüler*innen gelingt es mithilfe ihrer Fantasie meistens schnell im Plenum erste Assoziationen mit gehörter Musik oder gesehenen Bildern herzustellen. Zeigt man als Unterrichtseinstieg beispielsweise das Bild der Prospektpfeifen (also der Pfeifen, die man beim Betrachten einer Orgel von vorne sehen kann) und lässt die Schüler*innen dazu gemeinsam an der Tafel Begriffe sammeln kann hieraus schnell ein Pool mathematischer Ideen entstehen, die man anschließend aufgreifen und weiterentwickeln kann. Im digitalen Unterricht ließe sich das zum Beispiel mithilfe von Google Docs, dem Lernraum Berlin oder anderen Online-Tools umsetzen. Die Lehrkraft kann dann aus allgemeinen Beispielen versuchen mithilfe gezielter Nachfragen auf die Entwicklung mathematischer Ideen abzuzielen. Betrachtet man zum Beispiel das Bild einer Orgel so werden wahrscheinlich nach einer Zeit Begriffe wie „Muster“ oder „Symmetrie“ fallen, die man dann aufgreifen und weiterentwickeln kann. In der Abiturstufe ist es aber ebenso gut möglich auch die Schüler*innen konkret nach mathematischen Zusammenhängen innerhalb der Orgel suchen zu lassen, woraus anschließend Ideen für den weiteren Unterrichtsverlauf entstehen.

Im Folgenden haben wir konkrete Ideen zu einer Unterrichtsstunde notiert, die sich besonders mit den **Integralen in der Analysis** auseinandersetzt. Wir werden dabei anhand einer beispielhaften Rechnung auf die Ideen eingehen.

Was sind die „Prospektpfeifen“?:

Die sogenannten Prospektpfeifen sind die Pfeifen, welche bei einer Orgel (beispielsweise in der Kirche) von vorne sichtbar sind (siehe Abbildung). Im Inneren einer Orgel liegen noch viel mehr Pfeifen aus Holz und Metall versteckt, welche die viele unterschiedliche Klänge ermöglichen. Von vorne betrachtet wirken Orgeln auf den ersten Blick häufig symmetrisch und es scheint als seien die Pfeifen links und rechts von der größten mittleren Pfeife jeweils gleichgroß. Betrachtet wir sie jedoch genauer stellen wir schnell fest, dass keine Pfeife genauso groß wie eine andere ist. Dies lässt sich auch hörend erfahrbar machen: Häufig sind die mittleren Prospektpfeifen so angeordnet, dass sie eine chromatische Tonleiter ergeben, die man abwechselnd von links und rechts hört. Dennoch ergibt sich für das Auge eine fast perfekte Symmetrie.

2. Die Orgel unter einer Kurve

Beim Betrachten verschiedener Fotos von Orgeln ist uns die scheinbar vorhandene Symmetrie der Prospektpfeifen aufgefallen. Die Anordnung der einzelnen Pfeifen erinnert an eine Treppenfunktion, also haben wir uns informiert, wie groß die einzelnen Prospektpfeifen einer Orgel sein können, um zunächst die Dimensionen, mit denen man bei Orgeln arbeitet, verstehen zu können (eine gute Abbildung dazu ist im Material für Sek I zu finden – https://www.landesmusikrat-berlin.de/fileadmin/projekte/Instrument_des_Jahres/Orgel_2021/orgel_und_mathematik_zusatzmaterial_klasse5_8.pdf).

Eine mögliche Aufgabenstellung dazu wäre:

> Der Orgelprospekt nahezu jeder Orgel ist optisch ansprechend gestaltet. Man findet darin Symmetrien und einige Kurven. Wenn Sie ein passendes Koordinatensystem auf eine Abbildung einer Orgel legen und dann einige markante Punkte solch einer Kurve bestimmen, so können Sie anschließend versuchen, eine Funktionsgleichung zu bestimmen, die durch diese Punkte geht. Häufig hat man dabei mit quadratischen oder exponentiellen Funktionen zu tun.
>
> Tipp 1: Setzen Sie die y-Achse in die Mitte des Orgelprospekts. Das hilft, die Symmetrien besser zu erkennen.
>
> Tipp 2: Falls möglich: Arbeiten Sie mit einem digitalen Geometrieprogramm. Dort lässt sich sehr einfach mit den Parametern experimentieren und man kann schnell überprüfen, wann die Kurve des Funktionsgraphen gut zu dem Orgelprospekt passt.
>
> Tipp 3: Falls man die oberen Pfeifenenden sehen kann: Entscheiden Sie sich, ob Sie die linke oder rechte obere Ecke oder die Mitte des Oberendes als Referenzpunkte nehmen möchten. Sie können auch die Luftlöcher der Pfeifen als Referenz wählen, da das Auge sich meist an ihnen orientiert.

Wir sind wie folgt vorgegangen:

Wenn man weiß, wie groß die mittlere Orgelpfeife ist, so kann man anhand eines Fotos (für die Schüler*innen ausgedruckt oder an der interaktiven Tafel) über das Verhältnis der Pfeifen zueinander die etwaigen Größen der anderen Pfeifen im Prospekt ermitteln. Die Schüler*innen können mithilfe dieser Werte daraus eine Treppenfunktion zeichnen und die skizzierten Verhältnisse der Orgelpfeifen zueinander übernehmen. Wir haben uns an einer kleineren Orgel mit 9 symmetrischen Prospektpfeifen orientiert, wobei die mittlere Pfeife gleichzeitig mit etwa 2,5m die größte Pfeife ist und alle unsere Pfeifen einen Durchmesser von 10cm haben. (Die Orgelpfeifen haben eigentlich alle unterschiedliche Durchmesser. So müssten sie hier auch unterschiedliche Breiten haben. Zur Vereinfachung kann man erst einmal nur die Längenveränderung betrachten und die Breitenveränderung evtl. für besonders Leistungsstarke Schüler*innen mit einbeziehen.) Gegebenenfalls bietet es sich hier an zur Vereinfachung die Werte leicht zu verändern, um gleichzeitig bessere Ergebnisse zu erhalten. Im Folgenden sind die Größen der Pfeifen von links nach rechts in Abhängigkeit von Abstand des Mittelpunkts der Pfeife zum Mittelpunkt der größten Pfeife dargestellt (die Mitte der größten Pfeife liegt bei einer Darstellung im Koordinatensystem auf der y-Achse).

Abstand	0.4m	0.3m	0.2m	0.1m	0m	0.1m	0.2m	0.3m	0.4m
Größe	1.5cm	1.675m	1.9m	2.125m	2.5m	2.2m	1.95m	1.75m	1.6m

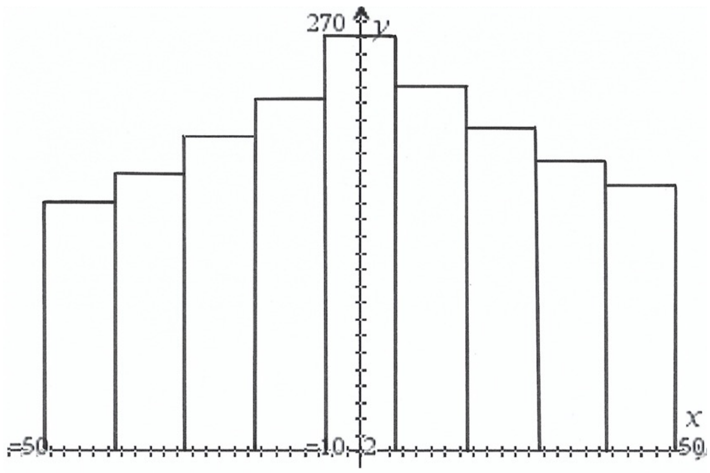

Abbildung 2: grafische Darstellung der Orgelpfeifen in einem geeigneten Maßstab

Betrachtet man diese Grafik, so liegt eine Untersuchung der Flächeninhalte der zweidimensional dargestellten Orgelpfeifen nahe. Eine Möglichkeit dazu ist es die oberen Mittelpunkte der Orgelpfeifen miteinander zu Funktionen zu verbinden. Wenn wir nun am oberen Ende jeder Pfeife deren Mittelpunkt markieren und diese Mittelpunkte miteinander verbinden so erhalten wir zwei quadratische Funktionen, welche sich am Mittelpunkt der oberen Pfeife schneiden. Die quadratischen Funktionen lassen sich mithilfe eines Gleichungssystems berechnen, indem man geeignete Werte der Orgelpfeifen nutzt. In der Regel lassen sich die Werte gut anpassen und man erhält tatsächlich alle Orgelpfeifenlängen auf dieser Funktion – trotzdem sollte man die Jugendlichen darauf aufmerksam machen, dass dies nur Näherungswerte sind. Zeichnet man durch Verbinden der oberen Mittelpunkte die Funktionen ein, so erhält man eine Darstellung, die stark an das sogenannte Riemann-Integral erinnert. Bei diesem werden die jeweiligen Balken addiert, um annähernd die Fläche unter der Kurve zu erhalten. In einem ersten Schritt könnte man dafür zunächst Ober- bzw. Untersumme bestimmen, um dann in einem zweiten Schritt die Riemannschen Zwischensummen, welche in diesem Fall die Balken der Orgelpfeifen sind, zu bestimmen.

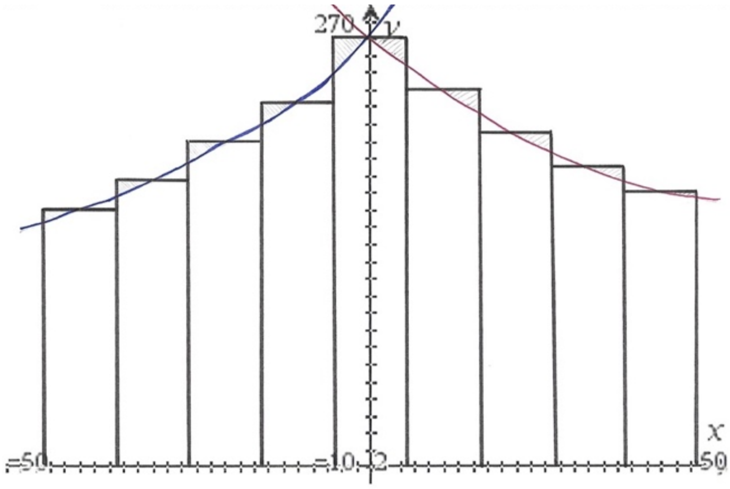

Abbildung 3: grafische Darstellung der Orgelpfeifen in einem geeigneten Maßstab verbunden durch zwei Graphen die durch die jeweiligen oberen Mittelpunkte der Rechtecke verläuft

3. Verschiedene Integrale berechnen

Nutzen wir die Einheit Meter, so ergibt sich für die linke (blaue) Funktion die Gleichung:

$$f1(x) = 2{,}5x^2 + 3{,}5x + 2{,}5$$

und für die rechte (rote) Funktion die Gleichung:

$$f2(x) = 2{,}5x^2 - 3{,}25x + 2{,}5$$

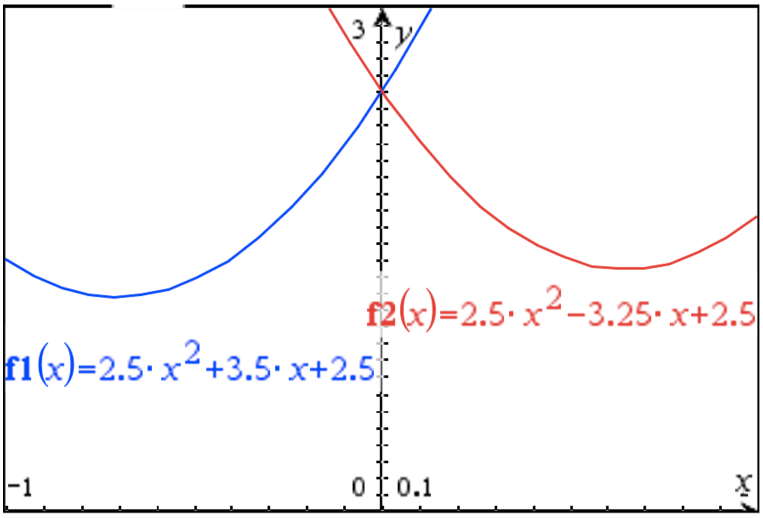

Abbildung 4: Zwei Grafen, welche durch die Mittelpunkte der jeweiligen Pfeifenspitzen verlaufen (siehe Abb. 3)

Mithilfe der folgenden Arbeitsschritte lässt sich anschließend zeigen, welchen engen Zusammenhang das berechnete Integral und die Flächen der jeweiligen Pfeifen, also die Balken aufzeigen:

Berechnet man das Integral unter den jeweiligen Funktionen, also unter der linken (blauen) Funktion im Intervall von -0,45 bis 0 und unter der rechten (roten) Funktion im Intervall von 0 bis 0,45, dann erhält man mithilfe der in der Schule gelernten Integralrechnung für unsere Werte beispielsweise einen Gesamtflächeninhalt von: 1,7184 m2

Berechnet man die einzelnen Flächeninhalte der Pfeifenquerschnitte, so erhält man einen Gesamtflächeninhalt von: 1,72 m2

Diese Herangehensweise eignet sich also zum Beispiel gut, um die Entstehung der Integralrechnung zu verdeutlichen. Ebenfalls kann man den Schüler*innen damit aufzeigen, wie man von einer näherungsweisen Berechnung der Flächeninhalte unter einer Kurve (zum Beispiel mit dem Riemannschen Integral und den Zwischensummen) zur genauen Berechnung mithilfe der Stammfunktion kommt.

4. Ausblick:

Wir haben hier **eine Möglichkeit** des mathematischen Umgangs mit der optischen Wirkung der Orgel dargestellt. Es gibt natürlich unendlich viele Möglichkeiten einen Umgang mit der Thematik zu finden und wir möchten Ihnen hier vor allem einen Impuls darstellen, der zur Entwicklung eigener Unterrichtsideen durch Sie oder Ihre Schüler*innen genutzt werden kann. Wenn Sie Zeit dazu haben empfehlen wir Ihnen mit Ihren Schüler*innen freiere Unterrichtsformate auszuprobieren und vor Ihrem Orgelbesuch interessenbezogene mathematische Aufgabenstellungen zu entwickeln. Hierfür bietet sich beispielsweise auch ein fächerübergreifendes Angebot zu den trigonometrischen Funktionen mit der Physik an. Man kann so dem sonst häufig sehr abstrakten Begriff der Schwingungen mit Messungen an der Orgel näherkommen. Damit lassen sich Verbindungen zwischen der Sinusfunktion und dem Klang der jeweiligen Töne herstellen.

Wir wünschen Ihnen und Ihren Schüler*innen viel Spaß beim Entdecken der Mathematik an der Orgel.